排列组合中的分组分配问题

江苏省华罗庚中学 史莺

对于分组分配问题，题目变化多，相似性强，是一类极易混淆的问题。针对这一点，可以把问题放到一起研究，进行分类，总结方法。

1. **相同元素分组问题**

例1 将6个相同的小球，放入4个相同的盒子，不能有空盒，共有多少种放法？

思考：小球相同，盒子相同，只要将6个小球拆分，可以是1,1,1,3；1，1,2,2；所以只有两种。

试一试：如果恰有一个空盒呢？

**反思：处理相同元素的分组问题，只要进行拆分。**

例2 将6个相同的小球，放入4个编号为1,2,3,4的盒子，不能有空盒，共有多少种放法？

思考：将6个小球排成一行，先在首尾两球的外侧各放置一块隔板，然后在6个小球中间的5个位置选3个插入隔板，形成4个盒子，所以共有种

再思考：如果恰有一个空盒呢？

分两步：（1）首尾两球外侧各放置一块隔板，并在6个小球中间的5个位置选2个各插入一块隔板有 种

（2）将剩下的一块板与前面的任意一块形成空盒有种

结果为40种

试一试：如果恰有两个空盒呢？

**反思：处理相同元素的分配问题（实际生活中名额分配）的方法**

1. 隔板法：将放有小球的盒子紧挨着一行放置，便可看作在排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板，相邻两块隔板形成一个“盒”，每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的方法。
2. 将个相同元素分给个不同的对象$(n\geq m)$有种
3. **不同元素分组分配问题**

例3 有6本不同的书，按下列分配方式分配

（1）分成三组，每组分别有1本，2本，3本；

（2）分给甲乙丙三人，其中一人1本，一人2本，一人3本；

（3）甲3本、乙2本、丙1本。

（4）分成三组，每组分别有2本；

（5）甲乙丙三人每人两本；

（6）分成4本，1本，1本的三组；

（7）甲乙丙三人中1人4本，1人1本，1人1本；

（8）甲4本、乙1本、丙1本；

思考：

（1）属于完全不均匀分组，结果为（按分步计数原理完成）。

（2）属于完全不均匀分组自由分配，结果为（即先完全不均匀分组后，再乘以组数的全排列）。

（3）属于完全不均匀分组定向分配，公式（按分步计数原理完成，等同于完全不均匀分组）。

（4）属于完全均匀分组，公式：（分步完成后除以完全均匀的组数的全排列）

（5）属于完全均匀分配，公式（先完全均匀分组，然后再全排列）。

（6）属于部分均匀分组，公式（分步完成后除以部分均匀组数的全排列）。

（7）属于部分均匀分配，公式（先部分均匀分组后，再全排列）。

（8）属于部分均匀定向分配，公式（部分均匀分组后，在乘以部分均匀组数的全排列）。

**反思：处理不同元素的分组分配问题，先分组（完全均匀分组、完全不均匀分组、部分均匀分组）再分配（自由分配、定向分配）。**

关于分组分配问题，我们在总结的同时又比较性的进行了公式化的规定，以后遇到这类问题，就其中对应的情况找方法，达到不混淆，同时还简单快捷的效果。