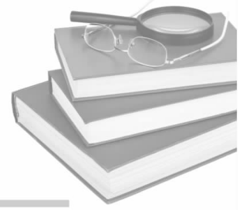
编者按 本文是裴光亚先生的遗作，是裴先生在湖北大学数学与统计学学院为师范生所做的报告。裴先生多年来关心中学教育，关注师范生的培养。“作为中学教师，为什么要学大学课程?”这个问题不仅直抵师范教育的原点，更是击中了教师培养的“要害”。裴先生的报告就试图回应这个问题，期望报告中居高临下的观点能给读者一些启示。文中个别地方已做删改。

作为中学教师，我们为什么读大学？



裴光亚（湖北省武汉市教育科学研究院）

文章编号：1002-2171(2019)6-0002-05

作为中学教师，我们为什么要学高等数学？

我的回答是：不只是因为可能教这样的知识有赖于闻道在先，也不只是担心这样的知识会下放而需要未雨绸缪。而是因为，我们需要这样的修养。

事实上，如果没有这样的修养，我们就不能真正理解中学数学。

比如函数，初中定义了，高中为什么还要重新定义，它们有什么不同？为什么允许“多对一”，不允许“一对多”？现实有怎样的需求？理论有怎样的逻辑？历史有怎样的动因？如何生成和发展？最原始的思想是什么？最核心的本质是什么？从变量说到对应说，再到关系说，给我们怎样的启示？回应这些问题，都离不开大学的修养。

在中学，我们所接触的函数都是常态的，只有在大学，我们才能见到一些“病态”的函数。而正是这些反例，在让我们震惊的同时，也让我们领悟到了函数的本质。比如，中学讲表示函数的三种方法，但实际上存在很多函数，既不能列表表示，也作不出它的图像，更无法写出它的解析式。我们可以构造这样的函数，给定了对应法则，却写不出某点的函数值。如圆周率 π 的小数点后第 n 位的值 $f(n)$，显然是一个函数。但$n=2$万亿时，$f(n)$是多少？至少现在，我们还不知道（最新纪录 π 的精确值到小数点后 12 411 亿位）。在中学，我们遇到的函数大多是连续的，而且是光滑的，所以作函数图像时，我们总是先描点，再用光滑的曲线联结。这样做的依据是什么？只有大学的知识才能解释。另外，通过大学的学习我们才知道，存在这样的函数，处处连续，但处处不光滑。

诸如此类，如果不具备这样的视野，我们对函数的理解就只能是坐井观天，在教学实践中就可能犯很多错误。下面的很多例子就发生在中学的课堂上。

比如，课题“选择怎样的上网方式，付费最少?”这里月费用 y 是上网时间 x 的函数。很多执教者这样说：“上网时间非负，可以是 1 小时，2 小时，100 小时，10 000 小时，以至无穷大。”画图像时又说：“直线可以无限延长。”

你看，教师强调的是定义域，又恰恰对定义域给出了错误的判断。这当然不是知识问题，而是修养问题。只有在大学，才会出现一些真问题，让我们对定义域保持足够的警惕。

又比如，出租车计费问题。这由两部分构成，即起步价和计时价。罗增儒教授调查发现，很多初学者不认为这是函数关系。说明，我们的函数教学，需要居高临下，实现由“变量说”到“对应说”的根本转变。

下面以统计为例。统计的问题可能更为严重。

高考题总是将频率作为概率。这是什么意思，为什么可以？中学只讲统计方法，不讲统计理论，而正是大学的理论为中学的方法提供了依据。如果没有大学的统计修养，我们，作为教师，就会知其然不知其所以然，在一些基本问题上犯错。

比如，有一道题：小明投篮 5 次，命中 4 次，他说一次投中的概率是$\frac{4}{5}$，对吗？

这种说法当然是不对的，理由呢？很多教师的解释是：“因为试验次数太少，不能估计概率”。

为什么试验次数少就不能估计概率呢？如此简单的问题，都经不起追问。同样错误的表述还有：“用频率的稳定值估计概率”，“随着试验次数的增加，频率越来越接近概率”，等等。我们知道，如果教师真正

理解了“大数定律”，这样的错误是不会发生的。

再看“相互独立事件同时发生的概率”问题。什么是事件的独立性？教材是这样定义的：事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响。常常被一些教师说成：事件 A 是否发生对事件 B 的发生没有影响。遗漏了“概率”一词。特别地，在对两个具体事件进行判断时，往往用直观的方法，这也容易导致对“概率”一词的忽略。

举一个例子：分别抛掷两枚质地均匀的硬币，设事件 A：第 1 枚为正面，事件 B：第 2 枚为正面，事件 C：2 枚结果相同。A,B,C 中哪两个相互独立？

A 和 B 相互独立，可以直观判断。

A 和 C(或者 B 和 C)呢？注意到，事件 C 有 2 种可能(同是正面或同是反面)，但在事件 A 发生的情况下，事件 C 就只有 1 种可能了。那么 A 和 C 是否独立呢？

事实上，A,C 也是相互独立的。很多人为什么犯错，留给各位思考。

进一步思考“n 个事件相互独立”。教材中有这样一段话：一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积。

这里，并没有给“n 个事件相互独立”下定义。有人便想当然地认为：如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任何两个都是相互独立的，那么就说 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

值得注意的是，在很多情况下都可以这样“推广”。比如，从两个数互素到 n 个数互素，从两条直线平行到 n 条直线平行，等等。此处却大谬不然。可见，我们需要居高临下。

我们再看独立性检验。教材是以“吸烟是否对患癌症有影响”为题来讨论的。由列联表计算出 $k\approx 56.632$，由于 k 远大于 6.635，即判断“吸烟与患癌症有关系”，这一判断错误的概率不会超过 0.01。

接着的例 1：讨论“能否在犯错误概率不超过 0.01 的前提下认为秃头与患心脏病有关系”。由列联表计算出 $k\approx 16.373>6.635$，因此在犯错误概率不超过 0.01 的前提下认为秃头与患心脏病有关系。

有教师“发现”，当犯错误概率的上界 $\alpha=0.010$ 时，临界值 $k_0=6.635$；当 $\alpha=0.005$ 时，$k_0=7.879$；当 $\alpha=0.001$ 时，$k_0=10.828$。显然，这里的 $k\approx 16.373$ 不仅大于 $\alpha=0.010$ 的对应值，也大于 $\alpha=0.005$ 的对应值，甚至大于 $\alpha=0.001$ 的对应值。犯错的概率越来越小，不是越来越精确吗？于是，自以为是地将结论改成：“在犯错误概率不超过 0.001 的前提下认为秃头与患心脏病有关系。”于是，这些教师还认为教材“有误”！

在一般情况下，这样思考是对的，我们希望不等式更精致，希望命题更精准，希望结果更精确。

在这里，却错了。错在哪里？留给各位去判断。(统计学有一个原则，即规则在前。只有规则在前，才能保证统计决策的可靠性、科学性，从而保证现实的公平性)

再看我最近的一个调查：人教 A 版《数学》(选修 2-3)，“离散型随机变量及其分布列”一节中习题2.1 第 3 题：对于给定的随机试验，定义在其上的任何一个随机变量，都可以描述这个随机试验可能出现的所有随机事件吗？为什么？

对于这道题，大多数教师给出的答案都是错误的。尽管教材在多个地方潜藏着本题的答案。如定义随机变量后，说：“利用随机变量可以表示一些事件”；随后又说：“在研究随机现象时，需要根据所关心的问题恰当地定义随机变量”；在掷骰子的分布列后，说：“利用这个表可以求出由 X 表示的事件的概率”。可惜，很多教师对这些提法熟视无睹，体会不到其中的微言大义。

为什么？缺乏对统计学的必要修养。当今，我们已进入大数据时代，统计知识、统计决策、统计思维已经成为未来公民的基本常识。但我们的中学课堂却因高等教育的偏颇而先天不足。这难道不是中学教师需要大学课程的反证吗？

大学的数学修养不够，往往直接影响对教学的设计。

比如中学讲集合，不是讲集合论，而是作为数学的语言来学的；中学讲充要条件、全称量词、存在量词，及它们的否定，不是讲逻辑，同样是作为用语，它们的定位都是语言，而不是理论。但作为教师，除了应准确把握这些知识的教学定位之外，没有对理论的初步了解，行吗？

再比如导数。导数是什么？导数是特殊的极限 $\left(f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$。但中学是不讲极限的。不讲极限，怎么讲导数？这其实提出了更高的要求，要求把极限的概念在直觉上显然起来。克莱因说：“一个数学上的主题，只有在成为直觉上的显然以后，才算研究到家了。”这意味着什么？我们可以说得极端一点，在大学，如果你记住了 ε-δ 的那套语言，就可以照本宣科了。但中学不行，你必须把 ε-δ 研究到家，使其成为直观上的显然。ε-δ 虽然不在场，但却深刻地影响着在场的直观。当你不讲 ε-δ 时，其实要求对 ε-δ 有更深刻的理解。这就是中学，优秀的中学教师一点都不比大学教师的知识储备逊色。

如果大学数学是抽象的，中学数学其实为大学数

学提供了丰富的直观。如果大学数学是一般的，中学数学其实为大学数学准备了丰富的具体。作为学生，由直观到抽象，由具体到一般，符合学习的规律，没有问题。但作为教者，就有问题了。教师必须居高临下，站在数学的高处，鸟瞰中学数学。因为直观离不开抽象的指导，具体离不开一般的引领。

涉及教学，大学修养所产生的影响就更多了，而且是无形的。

中学内容分四条主线：函数，代数，几何，统计。你对其中每一个领域的整体把握如何？函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型。这里，客观世界到模型，就决定了我们的教法。代数研究的是运算，运算就是式的变形，因此，代数重形式。几何研究的是图形，这就需要直观感知，操作确认，思辨论证，度量计算。统计作为一种实践活动，就得较为系统地经历数据收集与处理的全过程。

数学中分公理、定理、原理、法则。就数学而言，公理是给定的，定理是推导的，原理是概括的，法则是规定。那么，公理怎么教？定理怎么教？原理怎么教？法则怎么教？这些靠的不仅仅是概念，更重要的是修养。举一个简单的例子。比如讲“负负得正”。你可以直接告诉学生，从数学科学的角度考量是可以的；但从数学教学的角度考量，是不行的，因为它不利于学生的理解，无以解惑。于是，有两种方案，一是设置情境；二是追寻数学的内部矛盾。有人费尽心思做了这样的设计：用运算律来推导。也就是把运算律作为已知，通过逻辑推理得到运算法则。我们知道，这样的设计是有问题的。问题在哪？因为从高等代数的观点来看，数的运算法则是规定的，不是推导出来的。如群的定义，先规定运算法则，然后才可以研究运算律是否成立。怎么可以反其道而行之呢？

中学数学从内容特征来看，还可以分为语言类、模型类、方法类、工具类、随机类等等。每一类都有怎样的特点，应该如何设计教学，都离不开高屋建瓴的体悟。

教学中数学知识的存在有四种状态：现实情境，历史背景，数学活动，案例文本。举例来说，讲函数、方程，当然应该从现实情境出发；讲勾股定理，它的历史则更能使人震撼；如果讲复数，理所当然应着眼于数学内部的矛盾运动；如果要讲数学归纳法，案例模仿可能是很好的选择。我们该如何设计？

虽然面对的都是中学内容，不同修养者的见识却迥然不同。

在著名数学家张景中院士看来，小学数学就有函数的思想。比如加法，$2+3=5$，对给定的数对$(2,3)$，5是唯一确定，这是二元函数。矩形面积等于长乘以宽，也是二元函数；梯形面积等于上底加下底的和，再乘以高除以2，是三元函数。乘法口诀九九表的规律、做除法的试商、解应用题的探究等，都可以看到函数的影子。

有一道华杯赛题，如图1：

	17	16	15	14	13	
	18	5	4	3	12	
	19	6	1	2	11	
	20	7	8	9	10	
	21	22	•••			

图1

试根据这一数表，写出某一位置上的数。一般人看到的，只是按某种规律排列的数字串。而具备大学修养者，看到了什么？有理数是可数的，这就是学识。这也告诉我们，高水平的竞赛题是如何生成的。

中学知道无穷，无穷依赖想象；读了大学，你才知道，无穷是可以研究的，无穷还有等级，一个集合可以和它的真子集一一对应，这是在中学无法想象的。类似的，还有辛普森悖论：分组比较中都占优势的一方在总评中可能反而失势，“少数服从多数”也可能出现悖论，等等，也是在中学无法想象的。而正是这些无法想象的东西，使中学课堂焕发出生命的活力。

讲到这里，有人可能会说：“我不需要这样的修养，又怎么样？我只要会抓升学率就行了。”问题是，没有高等数学的修养，你能抓好升学率吗？现在的高考复习，有两个瓶颈：一是运算，很多错漏都出在运算上，症结何在？二是制高点上的把控，不知道讲什么。教师如何作为？直接与高等数学的修养有关。如果熟悉高等代数，就不难诊断运算问题的症结。如果熟悉数学分析，你就不难洞悉制高点上的命题趋势。

举一个例子。2008年高考数学全国卷Ⅱ理科第22题：设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）如果对任何 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围。

为了求 a 的取值范围，最直接的想法是把参数 a 分离出来，使之成为 $a\geqslant\dfrac{f(x)}{x}$，即 $a\geqslant\dfrac{\sin x}{x(2+\cos x)}$。现在，只需求 $h(x)=\dfrac{\sin x}{x(2+\cos x)}$ 的最大值，或者说它的上确界。

运用大学的知识，这道题就简单了。不难知道 $h(x)$ 的上确界就是 x 趋于0时的极限值。而 $h(x)$ 的极限是 $\dfrac{1}{3}$，于是 a 的取值范围是 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$。

问题是，中学不能这样做。首先，在 $x=0$ 处 $h(x)$ 没有意义；其次，我们也没有简便易行求极限的方法。

这就是对中学教师的挑战。作为教师，我明明有

简捷的方法，但却不能用。我们需要寻找，找到更加直观的工具，找到中学共同体认可的解法。

我们常说“居高临下”。其实，在一般情况下，“居高”并不难，难的是“临下”。但为了有效地“临下”，我们必须做到“居高”。“居高”只是万里长征的第一步，“临下”方显英雄本色。

现在，我们另起炉灶。

令 $g(x)=ax-f(x)$，注意到 $g(0)=0$，这样，条件 $f(x)\leqslant ax$ 可以转化为更加充分的条件 $g'(x)\geqslant 0$，即 $g'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\geqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$。

同样是求右边的最大值。这个最大值如何求？

如果运用导数，显然很麻烦。考察其结构，不难发现它是“二次型”，最大值在顶点处达到。事实上，$\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=\frac{2(\cos x+2)-3}{(2+\cos x)^2}=\frac{-3}{(2+\cos x)^2}+\frac{2}{2+\cos x}$，这是关于$\frac{1}{2+\cos x}$的二次式，它的最大值是$\frac{1}{3}$。

这就是代数直观。运算能力中，最核心的就是这种代数直观。

现在，我们已经求得 $a\geqslant\frac{1}{3}$。求得 a 的范围，其实只是必要条件。是否充分？还需要我们验证。只要 a 不在这个范围，都可以找到反例，而反例，往往涉及充分小。

我们需要验证，当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，总可以找到反例。也就是不论对怎样的正数 ε，如果 $a=\frac{1}{3}+\varepsilon$，都可以找到 $x_0>0$，使 $f(x_0)>ax_0$。

你看，这不正是极限的思想，甚至涉及极限的语言吗？

你会发现，很多大学的方法都与我们擦肩而过。但在大学积淀的思想，却指引着我们不断地解题创新。

什么是高考压轴题？高考压轴题就发生在这里。

作为未来的中学数学教师，我们需要高等数学的修养。最后，我还是要说，知识其实并不是重要的。重要的是，通过大学的数学学习，开阔了我们的视野，提升了我们的境界，积累了我们数学研究的经验，养育了我们的学科气质。这样，我们才无愧于中学数学教师的称号。

附文：中学讲抛物线，很多教师对抛物线的把握其实是不够的。抛物线有几种？有开口方向不同，也有开口大小之别。大学的知识告诉我们，所有抛物线都是相似的。从某种意义上可以说世界上只有一条抛物线。反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 也是如此。不幸的是，在中学的课堂上却不乏这样的规律：

(1)离坐标轴越远的曲线，k 越大；

(2)双曲线与三角形有公共点时，k 的最大值、最小值在顶点处达到。

这种由中考题，坐井观天，归纳出来的结果，荒唐至极。说明，如果没有理论武器，我们很多自以为是的判断是不堪设想的。

2005 年武汉市晋职考试中，有一道题：“三等分问题”被称为古希腊的三大几何作图问题之一。武汉市某中学生在“市长热线”中说“自己解决了三等分角问题这个难题，要求有关方面推荐发表”。“市长热线”受理单位拟请一位数学教师予以回复。现在假定由你来回复，请给出一个不超过 120 个字的回复意见。

题干描述是真实的。了解一点数学史或者教材教法的人都不难作答。但测试的结果出人意料。竟有 40%的晋级申请者不了解这一问题的正确提法，更不知道这个问题是具有终结性结论的不可能问题，还在鼓励学生继续探究，说一些文不对题的话。

再看一例，涉及的问题就有些高端了。初中的“实验与探究”：无限循环小数化分数。

设 $0.\dot{7}=x$，则 $10x-x=7$，于是 $x=\frac{7}{9}$。我在想，如果学生问起：无限小数怎么被 10 乘，两个无限小数怎么相减？这些没有依据的运算，我们如何向学生解释？如果不能解释，我们有没有像沈元先生对陈景润那样，播下创新种子的自信？特别地，$10\times 0.\dot{7}$ 意味着把 $0.\dot{7}$ 的小数点向右移动了一位，为什么移动一位后，小数点后面的部分不变呢？面对无穷的本质时，我们何以解惑？有怎样的自信？

上述的例子应该有说服力了，进一步，我们如何解读教材？体悟教材的微言大义。

函数的三要素之一，原来叫“对应法则”，现在叫“对应关系”。

“两个正数的算术平均数不小于几何平均数”，原来叫“重要不等式”，现在叫“基本不等式”。

涉及频率和概率时，我们常常提到“试验”一词，另外，也有一些所谓“数学实验”，试验与实验能否混用？

(1)语言类：如集合、常用逻辑用语。我们应该思考学习语言有什么规律，如何借鉴学习语言的规律来学习它们？

(2)模型类：如函数、数列、不等式、立体几何、平面解析几何等，它们都是从不同侧面描述现实世界的数学模型。我们应该思考：如何从现实对象中抽象出数学模型，进而应用与拓广？如何处理好生活世界与

核心素养导向的高中数学教材变革

——《普通高中教科书·数学（人教A版）》的研究与编写

章建跃（人民教育出版社）

摘　要：利用课堂观察、抽样调查、师生访谈、专题研究等所获得的关于《普通高中数学课程标准（实验）》及其教材（人教A版）适宜性的一手资料，从课程理念、课程目标、课程结构、课程内容及其学习顺序、数学课业负担的成因等角度，对2004年开始实施的课程改革展开基于事实的分析，反思其中存在的问题，归纳出一些对教材修订有指导价值的结论，从而明确新一轮课程改革中人教A版教材修订的努力方向。

关键词：实验版课标；调研与分析；问题与反思

文章编号：1002-2171(2019)6-0006-05

2018年新年伊始，教育部正式颁布了2019年秋季开始执行的普通高中课程方案和各科的课程标准。高中教育是学生个性形成、自主发展的关键期，高中课程是实现高中育人目标的重要载体，也体现着国家意志。新的课程标准是在深化课程改革、落实立德树人根本任务和实施新高考改革的大背景下修订的，体现了国家对普通高中课程的基本规范和质量要求，是教材编写、教师教、学生学、考试与评价的直接依据。以落实立德树人根本任务为宗旨，以《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称“2017年版课标”)为依据，人教A版《普通高中教科书·数学》(以下简称“人教A版”)进行了全方位修订。本次修订努力培根固源、守正出新，力争在发挥数学学科育人功能，使数学学科核心素养落地，为学生全面而有个性的发展做出独特贡献等方面实现创新与突破，从而为新一轮普通高中课程改革做出应有的贡献。

“人教A版”编委会未雨绸缪，在正式着手教材修订之前，开展了大量的前期研究，并且紧跟课标修订的步伐，把握好课改的新动向，使教材修订工作做到了有条不紊、扎实推进，圆满完成了全套教材的修订工作。为了使广大高中数学教师和数学教育研究者更全面、深入地了解“人教A版”的编写情况，把握教材的编写意图，更有效地利用教材提供的学习主题、基本线索和具体内容，发展学生的数学核心素养，

数学世界之间的关系？如何既达到形式化表达的基本要求，又实现数学思维活动的生动活泼？

(3)方法类：如推理与证明，算法等，它们是对已学过的方法的总结，也只有在进一步学习其他内容的过程中才能逐步掌握。这就需要我们考虑推理方法、算法思想在有关内容中的渗透、在不同内容中的应用等。进一步，如何引导学生模仿、操作和探索？

(4)工具类：如向量，它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具。如何从向量的实际背景入手进行教学？如何沟通向量与三角恒等变形、向量与几何、向量与代数之间的联系？同时又要充分体现向量自身的优越性。

(5)随机类：指概率和统计，它们和确定性数学是不同的。用处理确定性数学的思维方式处理随机性数学问题，用确定性数学中的语言习惯表达统计推断，用教确定性数学的方法教随机性数学，是我们在概率和统计教学中应该防范的问题。事实上，相对于概率、统计而言的确定性数学，主要是对日常生活中见到的图形和数量的抽象，研究的问题是图形的变化和计算法则，研究的基础是定义和假设，研究的方法是归纳、递归、类比和演绎推理。

而统计研究的基础是数据。这些数据的特点是，对于每一个数据而言都具有不确定性，我们需要抽取一定数量的数据，才可能从中获取信息。因此，统计学的研究依赖于对数的感悟，甚至是对一堆看似杂乱无章的数的感悟。通过对数据的归纳整理、分析判断，可以发现其中隐藏的规律。因为可以用各种方法对数据进行归纳整理、分析判断，所以，得到的结论也可能是不同的。而且，我们很难说哪一种方法是对的，哪一种方法是错的，我们只能说，能够更客观地反映实际背景的方法要更好一些。统计学关心最多的是好与不好，而其他的数学内容关心最多的是对与错。