关于简谐运动周期与能量的探究

田　双

常州市金坛区第一中学，江苏　常州　213200

摘　要：根据简谐运动的运动学和动力学定义推导出简谐运动的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，发现其中的 k 就是教材中回复力方程 $F=-kx$ 中的 k。在对三类弹簧振子周期的求解中发现，周期公式中的 k 不能简单理解为轻弹簧的劲度系数，而是由振动系统本身的性质决定的。此外，以水平弹簧振子为研究对象，发现弹簧振子做简谐运动的总能量与振幅的二次方成正比等特点。

关键词：简谐运动；周期；弹簧振子；能量

中图分类号：G633.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1003-6148(2025)5-0073-4

简谐运动很好地将运动、力与能量结合在一起，是高中物理知识体系中重要的内容，也是高考常考查的知识点。近年来，2021 年江苏卷、2023 年山东卷、2023 年湖南卷、2024 年辽宁卷、2024 年湖南卷和 2024 年湖北卷对简谐运动都有考查。仔细比较可以发现，2023 年湖南卷、2024 年湖南卷及 2024 年湖北卷对简谐运动的考查都是以实验题的形式出现，且都侧重考查简谐运动周期这个知识点。查阅人教版高中物理选择性必修第一册教材，并没有给出物体做简谐运动的周期公式，只给出了单摆运动的周期公式。而 2024 年湖北卷实验题中却给出了弹簧振子振动周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。那么，这个公式是如何推导出来的？对于不同的振动系统公式中的 k 能否都可以理解为弹簧的劲度系数？此 k 与教材中回复力 $F=-kx$ 中的 k 是否相同？教材中的单摆运动周期公式与上述周期公式有关系吗？此外，物体做简谐运动时系统的总能量与振幅有着怎样的关系？

1　简谐振动周期公式的推导

人教社 2020 版高中物理教材选择性必修第一册关于简谐运动的定义给出了两种表述[1]。

其一，根据运动学的特征来定义：如果物体的位移与时间的关系遵从正弦函数的规律，即它的振动图像（x-t 图像）是一条正弦曲线，这样的振动是一种简谐运动[2]。故物体做简谐运动时，位移与时间的关系满足方程

$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1}$$

其二，根据力的特征来定义：如果物体在运动方向上所受的力与它偏离平衡位置位移的大小成正比，并且总指向平衡位置，物体的运动就是简谐运动[2]。换句话说，如果物体受到的力满足

$$F=-kx \tag{2}$$

物体就做简谐运动。

根据牛顿第二定律，物体做简谐运动的加速度为

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x \tag{3}$$

对(1)式关于时间 t 求导两次得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2A\sin(\omega t+\varphi)=-\omega^2x \tag{4}$$

根据导数的定义可知，位移对时间的二次导数是物体做简谐运动的加速度。因此，联立(3)式和(4)式得到

$$\frac{k}{m}=\omega^2 \tag{5}$$

从(5)式可以得到做简谐运动物体角频率（又叫圆频率）的表达式

收稿日期：2024-12-09

基金项目：常州市教育科学"十四五"第二批备案课题"双新背景下高中物理审辩式教学的实践研究"(CZ145JTB20230074)。

作者简介：田双(1993-)，男，中学二级教师，主要从事物理教育、教学工作。

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

根据周期和频率的关系，可以得到物体做简谐运动的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{7}$$

此外，由(4)式可以得到物体做简谐运动的第三种微分方程的定义形式，即若物体的运动微分方程满足

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{8}$$

那么物体的振动为简谐运动[3]。

通过上面简谐振动周期公式证明过程可以发现，(7)式与(2)式中的 k 值是相同的，即周期公式中的 k 就是教材中回复力公式中的 k。那么，周期公式中的 k 能否理解为弹簧的劲度系数呢？

2　三类弹簧振子的周期

为解决上述问题，下面以高中常见的三类弹簧振动系统为研究对象，并假设三类弹簧振动系统不计一切阻力，弹簧为轻弹簧，物体看作质点，然后分别求解三类弹簧振动系统的周期。图 1 是由一个轻弹簧与物体组成的振动系统，轻弹簧与物体可以放在水平面上、竖直悬挂或放在斜面上，如图 1 所示。下面以图 1(c)中振动系统为例，求解系统振动的周期。

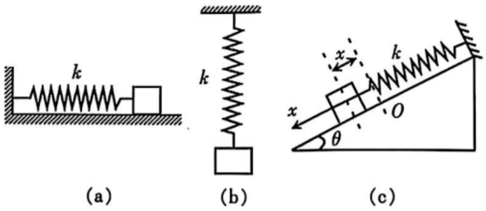

图 1　由一个轻弹簧与物体组成的振动系统

设图 1(c)中系统平衡时物体所在位置为坐标原点 O，沿斜面向下为 Ox 的正方向，物体平衡时弹簧伸长量为 x_0，由物体受力平衡可知

$$mg\sin\theta=kx_0 \tag{9}$$

按图 1(c)中所取坐标，物体沿 x 轴正方向移动 x 时，弹簧又被拉伸了 x，则物体受力为

$$F=mg\sin\theta-k(x+x_0) \tag{10}$$

将(9)式代入(10)式中，可得

$$F=-kx \tag{11}$$

由简谐运动的定义可知，图 1(c)中的物体在做简谐运动。同理，也可以证明图 1(a)(b)中的物体也在做简谐运动[4]。根据物体做简谐运动的周期公式可知，图 1(a)(b)(c)中的物体做简谐运动的周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，其中 k 为弹簧的劲度系数。

图 2 是由两个不同轻弹簧与物体组成的振动系统，根据系统放置的情况可分为图 2 中的(a)(b)(c)三种。以图 2(c)中振动系统为例，研究系统振动的周期。设图 2(c)中系统平衡时物体所在位置为坐标原点 O，沿斜面向下为 Ox 的正方向，物体平衡时两弹簧分别伸长了 x_1 和 x_2，由物体受力平衡可知

$$mg\sin\theta=k_1x_1=k_2x_2 \tag{12}$$

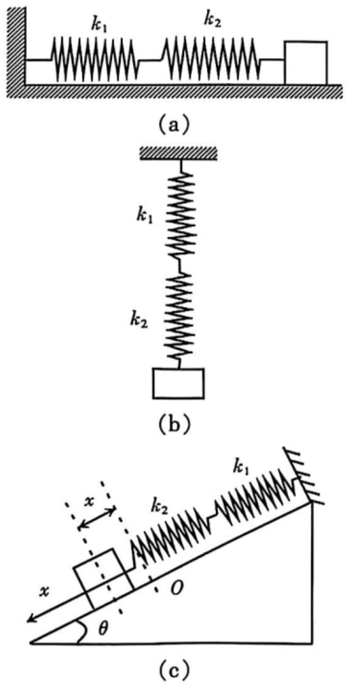

图 2　由两个不同轻弹簧与物体组成的振动系统(1)

按图 2(c)中所取的坐标，物体沿 x 轴正方向移动 x 时，两弹簧又分别被拉伸了 x'_1 和 x'_2，则物体受力

$$F=mg\sin\theta-k_2(x_2+x'_2)=mg\sin\theta-k_1(x_1+x'_1) \tag{13}$$

将(12)式代入(13)式中，可得

$$F=-k_2x'_2=-k_1x'_1 \tag{14}$$

由(14)式可得 $x'_2=-\frac{F}{k_2}$，$x'_1=-\frac{F}{k_1}$，又 $x=x'_1+x'_2$，故

$$F=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x=-kx \tag{15}$$

其中，$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$为常量，故物体做简谐运动。由简谐振动周期公式可知，图 2(c)中物体的简谐运动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$。同理，可以证明图 2(a)(b)中的物体也在做简谐运动，且简谐运动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$。

图 3 也是由两个不同轻弹簧与物体组成的振动系统，根据轻弹簧放置的情况可分为图 3 中的(a)(b)(c)三种。

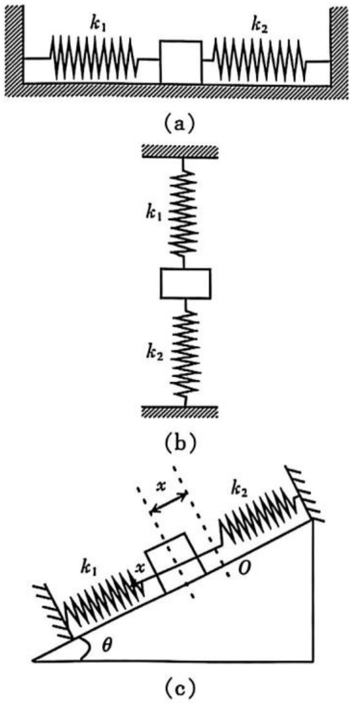

图 3 由两个不同轻弹簧与物体组成的振动系统(2)

以图 3(c)放置在斜面上的振动系统为例，求解系统振动的周期。设图 3(c)中系统平衡时物体所在位置为坐标原点 O，沿斜面向下为 Ox 的正方向，物体平衡时两弹簧形变量分别为 x_1 和 x_2。根据受力分析可知 $x_1=x_2$，令 $x_1=x_2=x_0$，则物体受力平衡方程为

$$mg\sin\theta=k_1x_0+k_2x_0 \tag{16}$$

按图 3(c)中所取的坐标，物体沿 x 轴正方向移动 x 时，则两弹簧又分别被压缩和拉伸了 x，则物体受力为

$$F=mg\sin\theta-[k_1(x_0+x)+k_2(x_0+x)] \tag{17}$$

将(16)式代入(17)式，可得

$$F=-(k_1x+k_2x)=-(k_1+k_2)x=-kx \tag{18}$$

令 $k=k_1+k_2$，且 k 为常量，可知物体做简谐运动。由上面简谐振动周期公式可知，图 3(c)中物体的简谐运动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$。同理，可以证明图 3(a)(b)中的物体也在做简谐运动，且简谐运动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$。

通过上面三类弹簧振子周期求解过程可以发现，周期公式中的 k 不能简单理解为弹簧的劲度系数，而是由振动系统本身决定的，且不同的振动系统 k 值不同。因此，振动系统的周期(频率)只和振动系统本身的物理性质有关，其中这种只由振动系统本身的固有属性所决定的周期(频率)就是教材中所说的固有周期(频率)的概念。

3 单摆振动的周期

根据上面简谐振动周期的推导，可得到教材中单摆振动的周期。如图 4 所示，当小球受到的空气阻力和细线的质量忽略不计时，小球在竖直面内小角度的摆动可以看作单摆运动。下面从力与位移的关系证明单摆运动是简谐运动。将图 4 中的小球小角度地拉离平衡位置 O 后释放，小球在竖直面内沿圆弧做往复运动。当小球沿圆弧运动到某一位置 P 时，细线与竖直方向的夹角为 θ。此时，小球受到重力 G 和细线的拉力 F_T，而迫使小球回到平衡位置 O 的力是重力沿圆弧切线方向的分力 $F=mg\sin\theta$，因此 F 是单摆运动的回复力[2]。

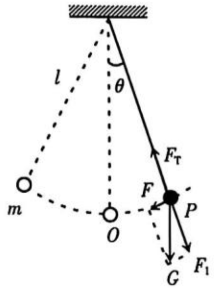

图 4 单摆周期的推导

小球在位置 P 时偏离平衡位置的位移 x 大小为弦长 OP，方向由 O 指向 P。当摆角 θ 很小时，圆弧 $\overset{\frown}{OP}$ 近似等于弦长 OP，由 $\overset{\frown}{OP}=l\theta$，则有

$$\theta=\frac{\overset{\frown}{OP}}{l}\approx\frac{OP}{l}=\frac{x}{l} \tag{19}$$

当摆角 θ 很小时，由 $\sin\theta$ 函数的泰勒级数可知 $\sin\theta\approx\theta$，则

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{\overset{\frown}{OP}}{l} \approx \frac{OP}{l} = \frac{x}{l} \tag{20}$$

因此，单摆运动的回复力 F 可以表示为

$$F = -\frac{mg}{l}x \tag{21}$$

其中，负号表示回复力与位移的方向相反。对于一个确定的单摆来说，小球的质量 m 和摆长 l 是一定的，所以 $\frac{mg}{l}$ 可以用常数 k 表示，故上式可以写成

$$F = -kx \tag{22}$$

因此，单摆运动在摆角很小的情况下才做简谐运动。根据简谐运动的周期公式可知，单摆运动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{23}$$

若图 5 中圆弧曲面光滑，小球从偏离最低点一小段距离静止释放，小球以最低点为平衡位置左右振动。同理，可以证明小球在光滑圆弧曲面上做简谐运动，且振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$，公式中的 R 为这段圆弧对应的曲率半径。

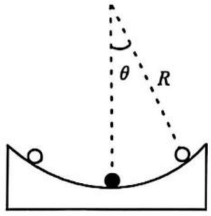

图 5　单摆周期的推导

4　简谐振动的能量

下面以图 6 所示的水平弹簧振子为例，简单说明简谐振动的能量。

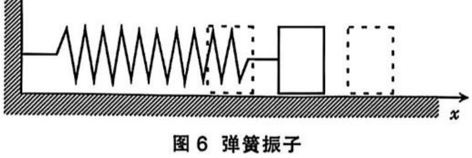

图 6　弹簧振子

设在某时刻物体的速度为 v，由(1)式可知

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t+\varphi) \tag{24}$$

则系统的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) \tag{25}$$

将(5)式代入上式可得

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \tag{26}$$

系统的弹性势能为

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \tag{27}$$

系统的总能量为

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2}kA^2 \tag{28}$$

由上式可以看出，弹簧振子做简谐运动的总能量与振幅的二次方成正比，且振幅越大，系统的总能量越大。即对某个弹簧振动系统来说，系统的总能量是由振幅大小决定的，与物体的质量和所处位置均无关系[3]。从(26)式和(27)式可知，系统的动能和势能都随时间周期性变化。当位移最大时，动能为零，势能最大；当位移为零时，势能为零，动能最大。此外，通过联立(1)(26)和(27)式可以发现，当系统的 $E_P=E_k$ 时，物体偏离平衡位置的位移大小为 $\frac{\sqrt{2}}{2}A$。

5　小　结

通过简谐运动的两种定义推导出简谐运动的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，证明了周期公式中的 k 值与教材中回复力公式 $F=-kx$ 中的 k 是相同的。通过对三类弹簧振子周期的求解，知道了 k 是由振动系统本身的性质决定的。此外，通过对单摆运动的证明，推导出了教材中的单摆周期公式。最后，以水平弹簧振子为例阐述了弹簧振子的能量特点。

参考文献：

[1]许冬保，朱文惠.简谐运动两个定义的等价推证与实践应用[J].物理教师，2023，44(7)：91−94.

[2]人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心.普通高中教科书物理选择性必修第一册[M].北京：人民教育出版社，2020：32−55.

[3]马文蔚，周雨青.物理学(第六版)下册[M].北京：高等教育出版社，2014：2−14.

[4]王培铎.科学思维进阶的物理习题教学研究——以"简谐运动"过程模型为例[J].中学物理教学参考，2023，52(32)：4−6.

（栏目编辑　蒋小平）